——論　文——

UDC 62-192：519.172：519.246.2

確率的診断可能なシステムの構成について

正員　金　武完†　　正員　藤原　秀雄††
正員　樹下　行三††

On the Design of Probilistically Diagnosable Systems

Moowan KIM†, Hideo FUJIWARA†† *and*
Kozo KINOSHITA††, *Regular Members*

あらまし　自己診断可能なシステムに関する研究において，システムを部分システムに分割し，部分システムを節点に，部分システム間の検査機能を枝に対応させることにより，システムをグラフで表現し，グラフ理論的立場から自己診断可能なシステムの解析および構成問題を取扱う手法がある．このとき，部分システムの故障確率を考慮することによって，より一般的な議論を行うことができる．本論文では，この確率を考慮したグラフモデルを用いて，診断可能なシステムの構成問題に関する考察を行った．まず，診断可能性に対する2つの概念（確率的同時診断可能性，確率的逐次診断可能性）を定義し，故障が生起したときの検査機能の振舞いに関して2つの仮定を設け，これより4つの確率的診断可能なシステムのクラスを定義している．更に，この各クラスに属する確率的診断可能なシステムの幾つかの構成法を示している．

1. まえがき

近年，ディジタルシステムの信頼性・可用性・保守性（RAS）に対する強い要求によって，自己診断可能なシステムの実現が望まれ，多くの研究がなされている[(1)〜(8)]．特に，多重故障に対処する故障診断を記述する目的でPreparataら[(1)]はグラフ理論的な立場から自己診断可能なシステムのモデルを提案し，同時あるいは逐次診断可能性について多角的な考察を行った．このモデルにおいて，システムは複数個の部分システムに分割され，各部分システム（以下，ユニットと称す）は必ずしも同一である必要はないが，ほかのユニットを検査する能力を持っていると考えている．更に，議論を簡単にする必要上，すべてのユニットの信頼性は同等であるという仮定を設けている．しかし，実際のシステムを構成するユニットはその信頼性において決して同等とはみなされず，より現実的な議論をするためには，ユニットの故障生起に関する確率的性質を考慮する必要がある．このような観点から，MaheshwariとHakimi[(5)]は故障生起確率に基づく診断能力の尺度tを導入し，システムがグラフ理論的モデルにおいて，確率的にt診断可能であるための必要十分条件を呈示した．

一方，従来の多くの研究においては，故障と検査に関して次の性質をもつシステムを考えていた．

（性質A）　ユニットu_iがユニットu_jを検査するとき，その検査結果は次のようになる．すなわち，u_iが正常状態にあるという前提の下でu_jが正常状態ならば“0”，同じ前提の下でu_jが故障状態ならば“1”である．もし，u_iが故障状態であるならばその検査結果は信頼できないので，“0”，“1”どちらの値をも取り得る．

ところで，各ユニットは診断モデルの説明より明ら

† 大阪大学大学院工学研究科電子工学専攻，吹田市
†† 大阪大学工学部電子工学教室，吹田市
Faculty of Engineering, Osaka University, Suita-shi, 565 Japan
論文番号：昭 52-476[D-113]

かなとおりほかのユニットに対する検査能力を有しており，その検査も大規模な故障検査系列から成立っていると考えられる．こうした事実を考慮すると，検査するユニットが故障状態にあり，同時に，検査されるユニットも故障状態に落ち入っているときは，その故障検査系列において少なくとも１つ以上の誤りが検出されると仮定しても十分，現実的な妥当性があるといえる．このような観点から Barsi ら[6]は故障と検査に関して次の性質をもつシステムを提案した．

（性質Ｂ）　ユニット u_i がユニット u_j を検査するとき，その検査結果は次のようになる．すなわち，u_i が正常状態であり，u_j も正常状態ならば“0”，そして，u_j が故障状態である場合は“1”である．u_i が故障状態であり，u_j が正常状態ならば“0”，“1”どちらの値をもあり得る．しかし，u_j も故障状態であるときは必ずその検査結果は“1”である．

本論文では，Maheshwari－Hakimi の診断モデルを用いて，以下の４つのクラスの確率的診断可能なシステムを対象にする．

(1) 性質Ａの下での t 確率的同時診断可能なシステム
(2) 性質Ａの下での t 確率的逐次診断可能なシステム
(3) 性質Ｂの下での t 確率的同時診断可能なシステム
(4) 性質Ｂの下での t 確率的逐次診断可能なシステム

以上４つのクラスのシステムに関して，診断可能なシステムの構成問題，すなわち，システムを構成するユニットと各ユニットの故障確率 $p(u_i)$ が与えられたとき，システムに適当な検査機能を加えて，システムが t 確率的診断可能となるような幾つかの構成法について考察を行っている．

2. 診断モデルと存在定理

システム S の診断モデルを $S=(V,\ \Gamma,\ p)$ で表現する．但し，

V　はユニットの集合

$\Gamma : V \rightarrow 2^V$　は接続関数でユニット u_i が u_j を検査できるとき及びそのときに限り　$u_j \in \Gamma(u_i)$

$p : V \rightarrow R$　は各ユニットの故障確率を表す．R は０と１の間の実数の集合とする．

Γ が定義されていないシステムを $S=(V,\ -,\ p)$ で表す．

明らかに，本論文で扱う診断モデル $S=(V,\ \Gamma,\ p)$ は節点に重みとして故障確率の値を付加した有向グラフ $G=(V,\ \Gamma)$ によっても表現できる（G を以下，診断グラフと呼ぶ）．

検査の結果は診断グラフ G の枝に“0”，“1”を重みとして割当てることによって表される．すなわち，枝 $(u_i,\ u_j)$ の重み $\rho(u_i,\ u_j)$ は u_i が u_j を正常状態と評価したとき，$\rho(u_i,\ u_j)=0$，u_i が u_j を故障状態と評価したとき，$\rho(u_i,\ u_j)=1$ で表される．このようにして，システムの検査結果は診断グラフの枝に重みが付加された有向グラフによって表され，重み関数 ρ のことをシステムのシンドローム（Syndrome）と呼ぶ．

ここで，性質Ａ，Ｂに基づく２つの無矛盾故障集合を定義する．

〔定義１〕　次の条件１，２を満たす V の部分集合 F をシンドローム ρ に関する A 無矛盾故障集合という．

（条件１）　$u_j \in \Gamma(u_i)$，$u_i \in \bar{F} = V - F$，$u_j \in F$ なるすべての u_i，u_j に対して，$\rho(u_i,\ u_j)=1$．

（条件２）　$u_j \in \Gamma(u_i)$，u_i，$u_j \in \bar{F}$ なるすべての u_i，u_j に対して，$\rho(u_i,\ u_j)=0$．

〔定義２〕　条件１，２に加えて次の条件３を満たす V の部分集合をシンドローム ρ に関する B 無矛盾故障集合という．

（条件３）　$u_j \in \Gamma(u_i)$，u_i，$u_j \in F$ なるすべての u_i，u_j に対して，$\rho(u_i,\ u_j)=1$．

次に，ここで対象とするユニットの故障は互いに独立であるものとする．従って，任意の部分集合 $F \subset V$ が故障集合である確率 $P(F)$ は次のようになる．

$$P(F) = \prod_{u_i \in \bar{F}} (1 - p(u_i)) \cdot \prod_{u_i \in F} p(u_i) \qquad (1)$$

〔定義３〕　任意のシンドロームにおいて，$P(F) > t$ となる A 無矛盾故障集合 F が高々１つしか存在しないとき，システム $S=(V,\ \Gamma,\ p)$ は性質Ａの下で t 確率的同時診断可能であるという．性質Ａの下で t 確率的同時診断可能なシステム全体を $\mathcal{A}_0^t$ で表す．

〔定義４〕　任意のシンドロームにおいて，$P(F) > t$ となる B 無矛盾故障集合 F が高々１つしか存在しないとき，システム $S=(V,\ \Gamma,\ p)$ は性質Ｂの下で t 確率的同時診断可能であるという．性質Ｂの下で t 確率的同時診断可能なシステム全体を $\mathcal{B}_0^t$ で表す．

〔定義５〕　任意のシンドロームにおいて，$P(F_i) > t$ $(1 \leq i \leq l)$ なる A 無矛盾故障集合 F_1，…，F_l に対して常に $\bigcap_{i=1}^{l} F_i \neq \phi$ となるとき，システム $S=(V,\ \Gamma,\ p)$ は性質Ａの下で t 確率的逐次診断可能であるという．性質Ａの下で t 確率的逐次診断可能なシステム全体を $\mathcal{A}_1^t$ で表す．

〔定義6〕 任意のシンドロームにおいて，$P(F_i)>t$（$1\leq i\leq l$）なるB無矛盾故障集合F_1, …, F_lに対して常に$\bigcap_{i=1}^{l} F_i \neq \phi$となるとき，システム$S=(V,\ \Gamma,\ p)$は性質Bの下で$t$確率的逐次診断可能であるという．性質Bの下で$t$確率的逐次診断可能なシステム全体を$\mathscr{B}_1^t$で表す．

4つのクラス$\mathscr{A}_0^t$, $\mathscr{B}_0^t$, $\mathscr{A}_1^t$, $\mathscr{B}_1^t$の間の関係として次のことがいえる．

(1) $\mathscr{A}_0^t \subset \mathscr{A}_1^t$　　(2) $\mathscr{A}_1^t \subset \mathscr{B}_1^t$

(3) $\mathscr{A}_0^t \subset \mathscr{B}_0^t$　　(4) $\mathscr{B}_0^t \subset \mathscr{B}_1^t$

式(1)より，

$$\log P(F) = \sum_{u_i\in \bar{F}} \log(1-p(u_i)) + \sum_{u_i\in F} \log p(u_i)$$

ここで，$K(t)=-\log t+\sum_{u_i\in V}\log(1-p(u_i))$

$$W(u_i)=\log\left[(1-p(u_i))/p(u_i)\right]$$

とおくと，任意の故障集合$F\subset V$において，$P(F)>t$は$W(F)<K(t)$と同値である．

但し，$W(F)=\sum_{u_i\in F} W(u_i)$

従って，t確率的診断可能なシステムにおいて故障ユニットを見つける問題は，それに属する節点の重みの和が$K(t)$より小さい無矛盾故障集合を求める問題に帰着できる．それ故，診断モデルとして$S=(V,\ \Gamma,\ p)$の表現と同様，$S=(V,\ \Gamma,\ W)$の表現も有用であり，以下の議論においては主に後者を用いる．又，各ユニットは故障状態であるより正常状態である方が多いと考えるのが自然である．すなわち，$p(u_i)<1/2$と仮定できる．このとき，すべてのu_iに対して$W(u_i)>0$となる．しかも各ユニットは絶対に故障しないとは考えないのが自然である．このとき，$P(u_i)>t$，すなわち，$W(u_i)<K(t)$と仮定できる．

次に，関数Γの定義域および値域を拡張する．

$$\Gamma^{-1}(u_i)=\{u_j \mid u_i\in\Gamma(u_j)\}$$

$X\subset V$に対して，

$$\Gamma(X)=\{\bigcup_{u_i\in X}\Gamma(u_i)\}-X$$

$$\Gamma^{-1}(X)=\{\bigcup_{u_i\in X}\Gamma^{-1}(u_i)\}-X$$

以上の記法と定義を用いて，本論文で扱うシステムの構成問題を次のように定式化する．

（構成問題） 任意のシステム$S=(V,\ -,\ W)$が与えられたとき，$\hat{S}=(V,\ \Gamma,\ W)$がt確率的診断可能となるような接続関数Γを求めること．

構成問題での1つの最適解は診断グラフの枚数が最小（すなわち，$\sum_{u\in V}|\Gamma(u)|$が最小）であるt確率的診断可能なシステムと定義できる．等確率の場合の診断モデルでは$\mathscr{A}_0^t$, $\mathscr{B}_0^t$, $\mathscr{B}_1^t$の各クラスに対して最適解を求める簡単な方法が知られている[1],[6]が，確率を考慮した場合，現在のところ，最適解を求める有効な方法は見つかっていない．3.以下では$\mathscr{A}_0^t$, $\mathscr{B}_0^t$, $\mathscr{A}_1^t$, $\mathscr{B}_1^t$の各クラスに対して，近似解を示すが，それらは各ユニットの故障確率をすべて等しいとしたとき，従来の最適解に一致することが分かる．従って，近似解ではあるが最適解に近い解と考えられる．

一般に，常にt確率的診断可能なシステムは構成可能であるとは限らない．まず，システム$S=(V,\ -,\ W)$が与えられたとき，$\hat{S}=(V,\ \Gamma,\ W)$がt確率的診断可能となるような接続関数Γが存在するための必要十分条件，すなわち，存在定理を示す．

〔定理1〕[8] 任意のシステム$S=(V,\ -,\ W)$が与えられたとき，$\hat{S}=(V,\ \Gamma,\ W)$が$\mathscr{A}_0^t$に属するような関数Γが存在するための必要十分条件は，Vの任意の分割$\{U_1,\ U_2\}$に対して共に$W(U_1)<K(t)$, $W(U_2)<K(t)$とはならないことである．

（証明略）

〔定理2〕[8] 任意のシステム$S=(V,\ -,\ W)$が与えられたとき，$\hat{S}=(V,\ \Gamma,\ W)$が$\mathscr{A}_1^t$に属するような関数Γが存在するための必要十分条件は，Vの任意の分割$\{U_1,\ U_2\}$に対して共に$W(U_1)<K(t)$, $W(U_2)<K(t)$とはならないことである．

（証明略）

すべてのユニットの故障確率が等しい場合，定理1，2の条件は故障ユニットの個数が$\lfloor(n-1)/2\rfloor$を超えないということを意味する．ここで，nはユニットの総数，$\lfloor x\rfloor$はxを超えない最大整数を表す．これはPreparataら[1]の定理1の結果と一致し，明らかに定理1，2はその拡張になっている．

〔定理3〕[8] 任意のシステム$S=(V,\ -,\ W)$が与えられたとき，$\hat{S}=(V,\ \Gamma,\ W)$が$\mathscr{B}_0^t$に属するような関数Γが存在するための必要十分条件は，Vの任意の分割$\{U,\ \{u_1\},\ \{u_2\}\}$に対して共に$W(U)+W(u_1)<K(t)$, $W(U)+W(u_2)<K(t)$とはならないことである．

（証明略）

〔定理4〕[8] 任意のシステム$S=(V,\ -,\ W)$が与えられたとき，$\hat{S}=(V,\ \Gamma,\ W)$が$\mathscr{B}_1^t$に属するような関数Γが存在するための必要十分条件は，Vのある

部分集合Uに対して，$|U|=|V|-1$，$W(U)\geq K(t)$となるUが存在することである．

（証明略）

同様に，このときも，すべてのユニットの故障確率が等しい場合，定理3，4の条件は共に故障ユニットの個数が$n-2$を超えないことを意味している．これは，Barsi ら[6]の定理1と一致し，定理3，4がその拡張になっていることを表している．

3. 確率的同時診断可能なシステム

この章では，t確率的同時診断可能なシステムの構成について考察する．すなわち，任意に与えられたシステム$S=(V, \neg, W)$が前章の存在定理1，3の条件を満足するとき，$\hat{S}=(V, \Gamma, W)$が$\mathcal{A}_0^t$，$\mathcal{B}_0^t$に属するような幾つかの接続関数Γの構成法について考察する．

〔定義7〕 一般性を失うことなく，
$W(u_1)\leq W(u_2)\leq\cdots\leq W(u_n)$と仮定する．
各$u_i\in V$に対してあるrが存在して

$$\Gamma(u_i)=\{u_{i+1}, u_{i+2}, \cdots, u_r \mid \sum_{j=i+1}^{r} W(u_j)<K(t),\ \sum_{j=i+1}^{r+1} W(u_j)\geq K(t)\}$$

となるとき，システム$S=(V, \Gamma, W)$をD_1^tシステムという．但し，添字iはすべて mod nで表現している．

〔定理5〕 定理1の条件を満たすD_1^t システムは$\mathcal{A}_0^t$ に属する．

（証明） 故障確率の大きさの順に並べたユニットの系列$\widetilde{V}=u_1u_2\cdots u_{n-1}u_n$に注目する．今，系列$\widetilde{V}$の中で連続して故障状態であるユニット群（個数が1個の場合も含む）をまとめて$\widetilde{f}_i$ で表し，故障ユニット群と故障ユニット群の間の正常状態のユニット群も同様にまとめて$\widetilde{g}_i$ で表すとすると，$\widetilde{V}$は一般に次のように表される．$\widetilde{V}=\widetilde{g}_0\widetilde{f}_1\widetilde{g}_1\cdots\widetilde{f}_l\widetilde{g}_l$，$\widetilde{g}_0$，$\widetilde{g}_l$ は空であっても構わないが，$\widetilde{g}_i$（$1\leq i\leq l-1$）は空ではない．系列$\widetilde{X}$を構成するユニットの集合をXで表し，集合f_i に属するユニットの添字を適当に書換え，$f_i=\{u_{i1}, u_{i2}, \cdots, u_{in(i)}\}$と表し，$|f_i|=n(i)$とする（図1参照）．このような表現形式を採用すると，一般に，無矛盾故障集合Fは$F=f_1\cup f_2\cup\cdots\cup f_l$，

$$W(F)=\sum_{j=1}^{l} W(f_j)<K(t) \text{ と書ける．}$$

(1) すべてのf_i（$1\leq i\leq l$）において，

$$\sum_{j=1}^{n(i)} W(u_{ij})<K(t) \text{ 且つ } \sum_{j=1}^{n(i)+1} W(u_{ij})<K(t)$$

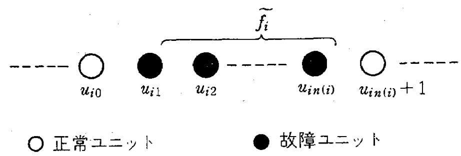

図1 系列$\widetilde{V}$
Fig.1-Sequence $\widetilde{V}$.

である場合．このとき，D_1^t システムの定義より，すべてのf_iに対して，$u_{iu(i)+1}\in\Gamma(u_{i0})$ がいえる．但し，$i_0=i_1-1$（mod nで表現）であるとする．すなわち，D_1^t システムの診断グラフ$G=(V, \Gamma)$において有向枝（u_{i0}，$u_{in(i)+1}$）が存在し，u_{i0}，$u_{in(i)+1}$は共に正常であるから，そのシンドロームは$\rho(u_{i0}, u_{in(i)+1})=0$ である．従って，この場合，系列$\widetilde{U}=\widetilde{g}_0\widetilde{g}_1\cdots\widetilde{g}_{l-1}\widetilde{g}_l$は有向閉路をなし，この有向閉路上のシンドロームの値がすべて“0”であることが分かる．しかも，定理1の条件を満たすから，$W(U)=W(V-F)\geq K(t)$ となる．従って，Uに属するユニットはすべて正常であることが分かる．Uに属するユニットから残りのユニットには枝があるので，残りのユニットの故障状態を識別することができる．

(2) (1)以外の場合．

すなわち，f_l 以外のf_i（$1\leq i\leq l-1$）において，

$$\sum_{j=1}^{n(i)} W(u_{ij})<K(t) \text{ 且つ } \sum_{j=1}^{n(i)+1} W(u_{ij})<K(t)$$

が成立ち，f_l において

$$\sum_{j=1}^{n(l)} W(u_{ij})<K(t) \text{ 且つ } \sum_{j=1}^{n(l)+1} W(u_{ij})\geq K(t)$$

が成立つ場合．但し，$l=1$ の場合も含む．

このときもD_1^t システムの定義より，f_l 以外のすべてのf_i に対しては$u_{in(i)+1}\in\Gamma(u_{i0})$ がいえる．そして，このとき以外の関係を満たす$u_{ln(l)+1}$ から始まり，u_{l0} で終るシンドロームの値がすべて“0”からなる系列$\widetilde{U}$が存在する．

$\widetilde{U}=\widetilde{g}_l\widetilde{g}_0\widetilde{g}_1\cdots\widetilde{g}_{l-1}=u_{ln(l)+1}\cdots u_{i0}u_{in(i)+1}\cdots u_{l0}$，
且つ $\sum_{u\in U} W(u)\geq K(t)$．

この系列において，もしu_{l0} が故障状態とすれば，Uに属するユニットがすべて故障状態となり，$W(U)\geq K(t)$で矛盾する．故に，ユニットu_{l0}は正常であることが識別される．しかも，$1\leq j\leq n(l)$ に対して$u_{lj}\in\Gamma(u_{l0})$であるので，f_l を構成するすべてのユニットの故障状態をu_{l0} を用いて識別できる．このこ

とと $\sum_{j=1}^{n(l)+1} W(u_{ij}) \geq K(t)$ より $u_{ln(l)+1}$ が正常であることも識別されるので，結局，系列 $\widetilde{U}$ 上のすべてのユニットが正常であることが分かる．$\widetilde{U}$ には各 u_{i0} ($1 \leq i \leq l-1$) が含まれているので，残りのユニットが各 u_{i0} によって検査され，システムのすべての故障ユニットが識別される．（証明終）

ところで，$\mathcal{A}_0^t$ に属する D_1^t システムは，すべてのユニットの故障確率が等しい場合，T 同時診断可能なシステム[1]に一致する．但し，T は p をユニットの故障確率の値とするとき，不等式

$$T < \{K(t) / \log[(1-p)/p]\} \quad (2)$$

を満たす最大整数とする．T 同時診断可能なシステムに関しては，今までに多くの研究がなされているが，中でも Preparata ら[1]は最適システムとして D_{1T} システムを示している．定理5で示した D_1^t システムを，すべてのユニットの故障確率が等しい場合，Preparata らの定義した T 同時診断可能なシステムとしては握すれば D_{1T} システムと一致する．すなわち，D_1^t システムは D_{1T} システムの拡張になっている．

（例） 7個のユニット $u_1, u_2, \cdots, u_7$ からなるシステム $S_1=(V, -, W)$ に対して，D_1^t システム $\hat{S}_1=(V, \Gamma, W)$ を構成してみよう．各ユニットの故障確率として，$W(u_1)=W(u_2)=W(u_3)=\log 2$, $W(u_4)=\log 3$, $W(u_5)=W(u_6)=W(u_7)=\log 5$ とおき，$K(t)=\log 12$ とする．このとき，$W(V) = \sum_{i=1}^{7} W(u_i) > 2K(t)$，すなわち，$S_1$ は $\mathcal{A}_0^t$ の存在定理の条件を満足している．そこで D_1^t システムの定義に従って Γ を求めると，$\hat{S}_1$ の診断グラフ $G_1=(V, \Gamma)$ は図2のようになる．$\hat{S}_1$ の検査枝の数を求めてみると，$R_1=\sum_{i=1}^{7} |\Gamma(u_i)| = 11$ である．

次に，すべての故障確率が $p=1/3$ に等しいとする．このときの D_1^t システム $\hat{S}_2$ を同様に定義に従って求めると，診断グラフ G_2 は図3のようになる．式(2)から T を求めると，$T < \log 12/\log 2$ より $T=3$．すなわち，この場合，システム $\hat{S}_2$ は3同時診断可能システムといえ，図3の診断グラフは明らかに $n=7$ に対する D_{13} システムの診断グラフに一致する．$\hat{S}_2$ の検査枝の数は $R_2=\Sigma|\Gamma(u_i)|=n \times T = 7 \times 3 = 21$ である．

〔定理6〕 定理3の条件を満たす D_1^t システムは $\mathcal{B}_0^t$ に属する．

（証明） 定理5の証明と同じ記法を用いる．

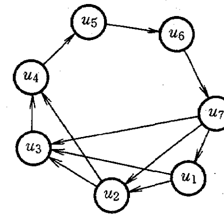

図2 診断グラフ G_1
Fig. 2-Diagnostic graph G_1.

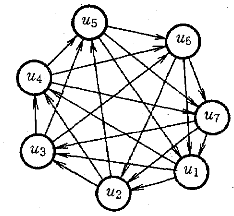

図3 診断グラフ G_2
Fig. 3-Diagnostic graph G_2.

(1) すべての f_i ($1 \leq i \leq l$) において

$$\sum_{j=1}^{n(i)} W(u_{ij}) < K(t) \text{ 且つ } \sum_{j=1}^{n(i)+1} W(u_{ij}) < K(t)$$

である場合．

このとき，D_1^t システムの定義より，すべての f_i に対して，$u_{in(i)+1} \in \Gamma(u_{i0})$ がいえる．すなわち，診断グラフ $G=(V, \Gamma)$ において，そのシンドロームが $\rho(u_{i0}, u_{in(i)+1})=0$ となる有向枝 $(u_{i0}, u_{in(i)+1})$ が存在する．ここで，性質Bよりユニット $u_{in(i)+1}$ は正常であることが分かる．この正常ユニット $u_{in(i)+1}$ から系列 $\widetilde{g}_i$ に沿って順次シンドロームを調べることにより $\widetilde{g}_i$ に属するユニットはすべて正常であることが分かる．そして，$\widetilde{g}_i$ の最後のユニット $u_{i+1,0}$ を用いて $\widetilde{f}_{i+1}$ に属する各ユニットが故障であることが識別でき，同時に $\widetilde{g}_{i+1}$ の最初のユニット $u_{i+1,n(i+1)+1}$ が正常であることが識別できる．この操作を順次繰返すことによりすべての故障ユニットが識別できる．

(2) f_i ($1 \leq i \leq l-1$) において

$$\sum_{j=1}^{n(i)} W(u_{ij}) < K(t) \text{ 且つ } \sum_{j=1}^{n(i)+1} W(u_{ij}) < K(t)$$

f_l において

$$\sum_{j=1}^{n(l)} W(u_{ij}) < K(t) \text{ 且つ } \sum_{j=1}^{n(l)+1} W(u_{lj}) \geq K(t)$$

が成立つ場合．

$l \geq 2$ のとき，シンドロームが $\rho(u_i, u_j)=0$ となる枝 (u_i, u_j) が存在するので，u_j が正常と識別でき，(1)の場合と同様 u_j から始めて順次ほかのユニットを診断できる．従って，$l=1$ の場合について証明する．まず，正常ユニットの個数が2個以上のとき，すなわち，$|g_0|+|g_1| \geq 2$ のとき，正常ユニット集合 g_0, g_1 上のシンドロームは "0" であり，g_0, g_1 に属する正常ユニットがまず識別される．次に，g_0 に属する u_{10} を用いて f_1 に属するユニットが故障であることが識別できる．従って，この場合 D_1^t システム

は$\mathcal{B}_0^t$ に属することが分かる．正常ユニット数がちょうど1個で，少なくとも1つの枝で$\rho(u_i,\ u_j)=0$ならば，今と同様にしてすべての故障ユニットが識別できる．最後に，正常ユニット数がちょうど1個で且つすべての枝に対して$\rho(u_i,\ u_j)=1$ の場合を考える．このとき，システムが$\mathcal{B}_0^t$ に属さないとする．すなわち，$W(F_1)<K(t)$，$W(F_2)<K(t)$ 且つ$F_1 \neq F_2$ である2つの無矛盾故障集合が存在するとする．$|F_1|=|F_2|=|V|-1$ であるから，$F_1=X\cup\{u_1\}$，$F_2=X\cup\{u_2\}$（但し，$u_1 \notin F_2$，$u_2 \notin F_1$）と書ける．又，$F_1\cup F_2=V$． 従って，$W(X)+W(u_1)<K(t)$，$W(X)+W(u_2)<K(t)$となるVの分割$\{X,\ \{u_1\},\ \{u_2\}\}$が存在することになり，定理3の条件を満たさなくなり仮定に反する．結局，以上，いずれの場合においても定理3の存在条件を満たすD_1^t システムは$\mathcal{B}_0^t$に属することが分かる．

（証明終）

〔定義8〕 Uの任意の分割$\{X,\ \{u_1\},\ \{u_2\}\}$に対して，共に$W(X)+W(u_1)<K(t)$，$W(X)+W(u_2)<K(t)$とはならない$V$のある部分集合$U$に対して，次の(1),(2)を満たすシステム$S=(V,\ \Gamma,\ W)$を$D_2^t$ システムという．

(1) すべての$u\in U$に対して

$\Gamma(u)\cap U=U-\{u\}$

(2) すべての$u\in\bar{U}=V-U$に対して，

$\Gamma^{-1}(u)\subset U$，$W(\Gamma^{-1}(u))\geq K(t)$．

〔定理7〕 D_2^t システムは$\mathcal{B}_0^t$ に属する．

（証明）(1) あるu_i，$u_j\in U$に対して，シンドローム$\rho(u_i,\ u_j)=0$ となる場合．このとき，u_jが正常であることが識別できるので定理が成立つのは明らかである．

(2) (1)以外の場合．

もし，Uの中に正常状態のユニットが2個以上存在するとすれば，その中の任意の組u_p，u_q に対して，$\rho(u_p,\ u_q)=0$ となる．従って，今考えているシンドロームにおいては，U の中の正常ユニットは高々1つであることが分かる．更に，Uに属するすべてのユニットが故障であるとすれば，$W(U)<K(t)$ となり，D_2^t システムの定義に反する．従って，この場合，Uに属するユニットのうちちょうど1個が正常，すなわち，$|U|-1$ 個のユニットが故障していることが分かる．次に，$|U|-1$ 個のユニットからなるUの部分集合のうちその故障確率が$K(t)$ より小さいものは1つしかないことを示す．今，もし，故障確率が$K(t)$より小さく，$|U|-1$ 個のユニットからなるUの部分集合が2つ以上あるとする．そのうちの2つをR_1，R_2とする．すなわち，$R_1\cup R_2=U$，$|R_1|=|R_2|=U-1$であるから$R_1=X\cup\{u_1\}$，$R_2=X\cup\{u_2\}$とかける（但し，$u_1\notin R_2$，$u_2\notin R_1$）． このことは$W(X)+W(u_1)<K(t)$，$W(X)+W(u_2)<K(t)$となるUの分割$\{X,\ \{u_1\},\ \{u_2\}\}$ が存在することを意味し，定義に反する．従って，$|U|-1$ 個のユニットからなるUの部分集合のうち，その故障確率が$K(t)$より小さいものがただ1つ見つかり，それが無矛盾故障集合である．故に，Uに属するただ1個の正常ユニットが識別され，Uに属さない残りのすべてのユニット（すなわち，$u\in\bar{U}=V-U$）はこの正常ユニットによって故障であるかあるいは正常であるかを識別することができる． （証明終）

4. 確率的逐次診断可能なシステム

システムのt確率的逐次診断可能性とは故障集合Fの故障確率$P(F)$がtより大きいという仮定の下で，少なくとも1つの故障ユニットを常に識別できるという性質である．従って，確率的逐次診断可能性とは，確率的同時診断可能性より明らかに広い概念であるといえる．この章では，t確率的逐次診断可能なシステムの構成について考察する．すなわち，任意に与えられたシステム$S=(V,\ -,\ W)$ が**2.**の存在定理2，4の条件を満たすとき，$\hat{S}=(V,\ \Gamma,\ W)$が$\mathcal{A}_1^t$，$\mathcal{B}_1^t$ に属するような幾つかの接続関数Γの構成法について考察する．

〔定義9〕 Uの任意の分割$\{U_1,\ U_2\}$に対して，共に$W(U_1)<K(t)$，$W(U_2)<K(t)$とはならないVのある部分集合Uに対して，次の条件を満たすシステム$S=(V,\ \Gamma,\ W)$をD_3^t システムという．

$U=\{u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_s\}$，$\bar{U}=\{u_{s+1},\ u_{s+2},\ \cdots,\ u_n\}$

とするとき，(1) sは奇数

(2) $1\leq i\leq(S-1)/2$ に対して，

$u_{2i}\in\Gamma(u_1)$，$u_{2i+1}\in\Gamma(u_{2i})$，$u_1\in\Gamma(u_{2i+1})$

且つ，$s+1\leq i\leq n$ に対して，$u_i\in\Gamma(u_1)$

(3) $1\leq i\leq(s-1)/2$ に対して，

$W(u_{2j})\leq W(u_{2j+1})$

〔定理8〕 D_3^t システムは$\mathcal{A}_1^t$ に属する．

（証明） D_3^t システムの診断グラフ$G=(V,\ \Gamma)$には$(s-1)/2$個の有向閉路$(u_1,\ u_{2i})(u_{2i},\ u_{2i+1})(u_{2i+1},\ u_1)$ が存在する．各有向閉路におけるシンドローム$\rho(u_1,\ u_{2i})=a_{i1}$，$\rho(u_{2i},\ u_{2i+1})$

$=a_{i2}$, $\rho(u_{2i+1}, u_1)=a_{i3}$ をまとめて $\{a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}\}$ と表すことにする．

(1) 少なくとも1つの有向閉路の検査結果が $\{0, 0, 1\}$ となるシンドロームの場合，直ちに，u_1 を故障状態のユニットとして識別することができる．

(2) (1)以外のシンドロームの場合．

各有向閉路のシンドロームとしては，$\{0, 0, 0\}$, $\{1, 1, 1\}$, $\{1, 1, 0\}$, $\{1, 0, 1\}$ $\{0, 1, 1\}$ があり得る．ここで，シンドローム $\{0, 0, 0\}$ の有向閉路を構成するユニット u_{2i} の集合を f_1, 同じ有向閉路に対するユニット u_{2i+1} の集合を f_2 とおき，シンドローム $\{1, 1, 0\}$ の有向閉路を構成するユニット u_{2i+1} の集合を f_3, シンドローム $\{0, 1, 1\}$ の有向閉路を構成するユニット u_{2i} の集合を f_4 とおく（図4参照）．

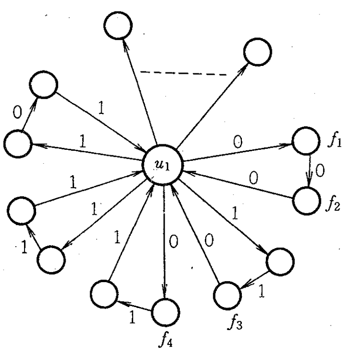

図4　定理8の説明図
Fig.4-Illustration of theorem 8.

まず，無矛盾故障集合 $F_1, F_2, \cdots, F_l$ のうち，$u_1\in F_i$, $u_1\notin F_j$ なる F_i, F_j が存在すると仮定する．ユニット u_1 が故障状態であるとき，$\rho(u_l, u_1)=0$ ならば，u_l が故障であることがいえる．$\rho(u_{2r}, u_{2r+1})=1$ ならば，u_{2r} と u_{2r+1} のうち少なくとも一方は故障であることがいえる．従って，仮定 $W(u_{2r})\leq W(u_{2r+1})$ を考え合せると，$W(F_i)\geq W(u_1)+W(f_1)+W(f_2)+W(f_3)+W(f_4)$ がいえる．次に，ユニット u_1 が正常状態であるとき，$\rho(u_l, u_1)=1$ ならば，u_l が故障であることが分かり，$\rho(u_1, u_r)=1$ ならば，u_r が故障であることが分かる．従って，$X=\{u_1, f_1, f_2, f_3, f_4\}$ とおくと，F_j は少なくとも $U-X$ を含む．故に，$W(F_i)$, $W(F_j)$ に関して次の関係式が成立つ．

$$K(t)>W(F_i)\geq W(X)$$
$$K(t)>W(F_j)\geq W(U-X)$$

これは $W(X)<K(t)$, $W(U-X)<K(t)$ となる U の分割 $\{X, U-X\}$ が存在することを意味し，D_3^t システムの定義に矛盾する．従って，無矛盾故障集合 $F_1, F_2, \cdots, F_l$ はすべて u_1 を含むかあるいはすべて u_1 を含まないかのどちらかであることが分かる．これより，u_1 がある無矛盾故障集合 F_i に属しておれば，そのことは u_1 が故障状態であることを示している．属していないときは u_1 が正常状態であることを示しておるので，u_1 によって少なくとも1つの故障状態のユニットを発見することができる．（証明終）

〔定義10〕 次の条件を満たすシステム $S=(V, \Gamma, W)$ を D_4^t システムという．

(1) 診断グラフ $G=(V, \Gamma)$ は，k 個の有向閉路を持ち，各有向閉路は1つのユニットだけを共有している．このユニットを u_{00}, 第 i 番目の有向閉路 L_i を $L_i=\{u_{00}, u_{i1}, \cdots, u_{in(i)-1}\}$ と表し（図5参照），$|L_i|=n(i)$ とすると，

$$\sum_{i=1}^{k} n(i)-k+1=n=|V|$$

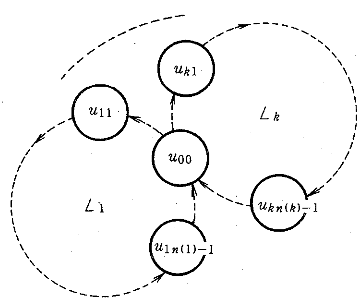

図5　定義10の説明図
Fig.5-Illustration of definition10.

(2) $\displaystyle\sum_{i=1}^{k}\left[W(u_{in(i)-1})+\sum_{j=1}^{\lceil n(i)/2\rceil-1}W(u_{ij})\right]\geq K(t)$

$\lceil x\rceil$ は x より小さくない最小整数を表す．

(3) 各 L_i において，

$W(u_{i2})\leq W(u_{i3})\leq\cdots\leq W(u_{in(i)-2})$

〔定理9〕 D_4^t システムは $\mathcal{B}_1^t$ に属する．

（証明）(1) ある u_i, $u_j\in V$ に対して，シンドローム $\rho(u_i, u_j)=0$ となる場合．このとき，性質Bから u_j が正常であることが分かるので，u_j によって少なくとも1つの故障ユニットを発見することができる．

(2) 値がすべて"1"であるシンドロームの場合．もし，u_{00} が正常であると仮定するならば，各有向閉路

L_i において，u_{i1}，$u_{in(i)-1}$ は故障状態であるといえる．$\rho(u_i, u_j)=1$ においては，ユニット u_i，u_j が連続して正常であることはありえない．従って，残りのユニットのうち少なくとも $\lceil n(i)/2 \rceil - 2$ 個のユニットが故障であることが導かれる．このことと，条件(3)より，任意の無矛盾故障集合 F の故障確率 $W(F)$ は次の関係式を満たす．

$$W(F) \geq \sum_{i=1}^{k} \left[W(u_{i1}) + W(u_{in(i)-1}) + \sum_{j=2}^{\lceil n(i)/2 \rceil - 1} W(u_{ij}) \right]$$

上式の右辺の値は条件(2)より $K(t)$ 以上である．すなわち，u_{00} が今考えているシンドロームの場合において正常状態であることはあり得ない．従って，この場合，u_{00} を故障状態として識別できるので，D_4^t システムは $\mathcal{B}_1^t$ に属するのである．（証明終）

D_4^t システムもすべてのユニットの故障確率が等しいと考えた場合，性質Bの下での T 逐次診断可能システムの最適システムに一致する．但し，T はユニットの等確率の値を $W = \log[(1-p)/p]$ とするとき，不等式 $T < K(t)/W$ を満たす最大の整数であるとする．このとき，D_4^t システムの条件(2)は次のように分ける．

$$W \sum_{i=1}^{k} [1 + \lceil n(i)/2 \rceil - 1] = W \sum_{i=1}^{k} \lceil n(i)/2 \rceil \geq K(t)$$

あるいは，$\sum_{i=1}^{k} \lceil n(i)/2 \rceil > T$．　k の値として，この不等式を満たす最大の値を取るようにすれば，

$$T = \sum_{i=1}^{k} \lceil n(i)/2 \rceil - 1 = \lceil n/2 \rceil + k - 2$$

となる．これは，Barsi らが T 逐次診断可能システムの最適解として求めた k − rosace システムの条件式（文献(6)，定理１２）と一致する．

5. む す び

本論文では，システムを構成する各ユニット u_i の生起故障確率 $p(u_i)$ を考慮に入れた診断モデル $S=(V, \Gamma, p)$ を用いて確率的診断可能なシステムの構成問題を考察した．

故障と検査に関する２つの仮定（性質A，性質B）と診断可能性に関する２つの概念（確率的同時診断可能性，確率的逐次診断可能性）を用いて確率的診断可能なシステムを４つのクラス $\mathcal{A}_0^t$，$\mathcal{A}_1^t$，$\mathcal{B}_0^t$，$\mathcal{B}_1^t$ に分類し，各クラスに属する t 確率的診断可能なシステムの幾つかの構成法を示した．その中の D_1^t，D_4^t システムはそれぞれ等故障確率の場合，Preparata ら[1]，Barsi ら[6]が同時診断可能なシステム，逐次診断可能なシステムについて示した最適システムと一致する．しかし，D_1^t，D_4^t システムは等故障確率でない一般の場合，必ずしも最適システムであるとはいえないので，最適解を求める問題は今後に残されている．ほかに，本論文で考察しなかった問題として，故障確率 p が与えられていないシステム $S=(V, \Gamma, -)$ から t 確率的診断可能なシステム $\hat{S}=(V, \Gamma, p)$ を求める問題，すなわち，故障確率割当て問題が考えられる．

謝辞　末筆ながら，日ごろ御指導頂く本学の尾崎弘教授，ならびにご討論頂いた尾崎研究室の諸氏に深謝します．

文　　献

(1) F.P.Preparata, G.Metze and R.T.Chien: "On the connection assignment problem of diagnosable systems", IEEE Trans., EC-16, p.848 (Dec.1967).

(2) C.V.Ramamoorthy and W.Mayeda: "Computer diagnosis using the blocking gate approach", IEEE Trans., C-20, p.1294 (Nov.1971).

(3) J.D.Russell and C.R.Kime: "System fault diagnosis: Closure and diagnosability with repair", IEEE Trans., C-24, p.1078 (Nov. 1975).

(4) J.D.Russell and C.R.Kime: "System fault diagnosis: Masking, exposure, and diagnosability without repair", IEEE Trans., C-24, p.1155 (Dec.1975).

(5) S.N.Maheshwari and S.L.Hakimi: "On models for diagnosable systems and probabilistic fault diagnosis", IEEE Trans., C-25, p.228 (March 1976).

(6) F.Barsi, F.Grandoni and P.Maestrini: "A theory of diagnosability of digital systems", IEEE Trans., C-25, p.585 (June 1976).

(7) H.Fujiwara and K.Kinoshita: "Connection assignments for probabilistically diagnosable systems", IEEE Computer Society Repository, R76-224 (1976).

(8) H.Fujiwara and K.Kinoshita: "Some existence theorems for probabilistically diagnosable systems", IEEE Computer Society Repository, R76-240 (1976).

（昭和５２年２月２１日受付）