UDC 007.52 : 681.325.6

# 出力端子付加による診断容易な順序機械について

正員 藤原 秀雄† 正員 樹下 行三†

# Diagnosable Sequential Machines with Additional Outputs

Hideo FUJIWARA†, *Member and* Kozo KINOSHITA†, *Member*

**あらまし** 本論文では，診断容易な順序機械として $I_j{}^l$-DS をもつ（同じ入力 $I_j$ を $l$ 個連ねた入力系列を distinguishing sequence にもつ）順序機械を考え，出力関数を付加することにより $I_j{}^l$-DS をもつ順序機械に拡大する問題について考察している．順序機械 $M$ を $I_j{}^l$-DS をもつ順序機械に拡大する問題は，$M$ の $I_j$ 列部分機械を DS をもつオートノマス順序機械に拡大する問題と等価である，したがって，オートノマス順序機械に対象を限って，オートノマス順序機械に $p$ 値出力関数を付加することにより DS をもつ順序機械に拡大できるための必要十分条件を示し，その拡大のアルゴリズムを述べる．さらに長さ $k$ の DS をもつオートノマス順序機械に拡大できるための必要十分条件が，“分解 $\pi(M, k)$ に関して $(p, k)$ 準 FSR 実現可能” であることを示し，状態数を越えない長さの DS をもつオートノマス順序機械に拡大するアルゴリズムを述べる．

## 1. まえがき

順序機械の故障検査において，与えられた順序機械が DS (distinguishing sequence) を持つときには，比較的短い検査系列を求め得ることが知られて[1],[2]おり，それ以外の順序機械については一般に故障検査系列が非常に長くなる．したがって最近では，順序機械を設計する段階において，故障検査が容易になるようにもとの機械を変更するという方法が考察されている[3]~[6]．診断容易な順序機械に変更する方法としては，(1) 入力変数を新しく付加する方法[6]と，(2) 出力変数を付加する方法[3]~[5]が考えられている．(2) の立場では，まず Kohavi[3] らが出力を付加することにより与えられた順序機械をある長さの入力系列がすべて DS であるような (definitely diagnosable) 順序機械にする方法を示し，中村[5]らは，少なくとも一つの DS を持ち，付加出力端子数を最小にする順序機械を構成する方法を示した．しかし集積回路では回路の複雑さに対して入出力線が少ないのが望まれることを考慮すると，複数個の付加出力端子を加えるよりも状態の split を許すことにより 1 本の付加出力端子で DS を持つ順序機械に拡大するほうが望まれる．Martin[4]はこの方法で，同じ入力 $I$ を $l$ 個連ねた入力系列を DS($I^l$-DS) にもつ順序機械に拡大する方法を示している．一般に $I^l$-DS を持つ場合は，普通の DS をもつ順序機械より短い検査系列が得られる．しかし，Martin の方法では，与えられた順序機械の出力関数を考慮していないために，$I^l$-DS をもたせるのに必要以上の状態の split が行なわれることになる．

ここでは，既存の出力関数をも考慮し，$I^l$-DS をもつ順序機械に拡大できるための必要十分条件を示し，Martin の方法より少ない状態の split で $I^l$-DS をもつ順序機械に拡大するアルゴリズムを述べる．さらに状態の split を許さないで $I^l$-DS をもつ順序機械に拡大する問題を考察する．すなわち，$p$ 値出力関数付加により $I^l$-DS をもつ順序機械に拡大できるための必要十分条件，状態数を越えない長さの $I^l$-DS をもつ順序機械に拡大できるための必要十分条件を示し，最小の出力関数付加による拡大の方法を述べる．

## 2. 順序機械の拡大

以下で対象とする順序機械は既約で強連結な Mealy 形とする順序機械 $M$ は，$M=(S, I, Z, \delta, \lambda)$ で示される．ここで $S=\{S_1, S_2, \cdots, S_n\}$ は状態の有限集合，$I=\{I_1 I_2, \cdots, I_m\}$ は入力記号の有限集合，$Z=\{Z_1,$

† 大阪大学工学部電子工学教室，吹田市
Faculty of Engineering, Osaka University, Suita-shi, Japan 565

論文番号：昭 47-534 [D-136]

$Z_2, \cdots, Z_p\}$ は出力記号の有限集合，$\delta: S\times I\to S$ は状態遷移関数，$\lambda: S\times I\to Z$ は出力関数である．

［定義1］ オートノマス順序機械 $M$ は，$M=(S, Z, \delta, \lambda)$ で示される．ここで $S, Z$ は状態，出力記号の有限集合，$\delta: S\to S$ は状態遷移関数，$\lambda: S\to Z$ は出力関数である．

［定義2］ 順序機械 $M=(S, I, Z, \delta, \lambda)$ の $I_j$ 列部分機械 $M_{I_j}$ とは，$M_{I_j}=(S, Z, \delta_{I_j}, \lambda_{I_j})$ で示されるオートノマス順序機械である．ここで $\delta_{I_j}: S\to S$, $\lambda_{I_j}: S\to Z$ は，$^\forall S_k\in S$ に対して，$\delta_{I_j}(S_k)=\delta(S_k, I_j)$, $\lambda_{I_j}(S_k)=\lambda(S_k, I_j)$ で定義される．

［定義3］ ある入力系列を $n$ 状態の順序機械 $M$ に加えるとき，その初期状態に対応して $n$ 個の異なる出力系列が得られるならば，その入力系列を DS (distinguishing sequence) と呼ぶ．オートノマス順序機械 $M$ に対しては，初期状態に対応して $n$ 個の異なる有限長の出力系列が得られるとき，オートノマス順序機械 $M$ は "DS をもつ" という．

［定義4］ 同じ入力記号 $I_j$ を $l$ 個連ねた入力系列が DS であるとき，"$I_j{}^l$-DS" と呼ぶ．

出力関数を付加することにより $I_j{}^l$-DS をもつ順序機械に拡大する問題を考察する準備として，順序機械の拡大の定義をつぎに示す．

［定義5］ 順序機械 $M=(S, I, Z, \delta, \lambda)$ の拡大とは，$M$ に出力関数 $\lambda_0: S\times I\to Z_0$ を付加し，順序機械 $M'$ にすることである．拡大される順序機械 $M'$ を $M'=(S, I, Z', \delta, \lambda')$ と書くとき，$Z'=Z\times Z_0$ であり，$\lambda': S\times I\to Z'$ は，$\lambda'(S_i, I_j)=(\lambda(S_i, I_j), \lambda_0(S_i, I_j))$ で定義される．

オートノマス順序機械 $M=(S, Z, \delta, \lambda)$ に出力関数 $\lambda_0: S\to Z_0$ を付加して拡大される順序機械 $M'$ を，$M'=(S, Z', \delta, \lambda')$ と書くとき，$Z'=Z\times Z_0$ であり，$\lambda': S\to Z'$ は，$\lambda'(S_i)=(\lambda(S_i), \lambda_0(S_i))$ で定義される．

定義5より，順序機械 $M$ と $M'$ の状態集合，状態遷移関数はおのおの同じで，$M'$ の出力関数 $\lambda'$ は $M$ の出力関数 $\lambda$ を含むゆえ，順序機械 $M'$ は順序機械 $M$ を含む (cover)* ことになる．

与えられた順序機械 $M$ を，$I_j{}^l$-DS をもつ順序機械 $M'$ に拡大する問題は，順序機械 $M$ の $I_j$ 列部分機械（オートノマス順序機械）を，DS をもつオートノマス順序機械に拡大する問題と等価である．したがって，以下では，オートノマス順序機械が与えられたとき，$M$ に出力関数を付加することにより，DS をもつオートノマス順序機械に拡大する問題について考察する．

* cover の定義は文献 (11) に同じ．

## 3. 拡大のための必要十分条件

ここでは，オートノマス順序機械に $p$ 値出力関数を付加することにより，DS をもつオートノマス順序機械に拡大できるための必要十分条件を示す．

［定義6］ オートノマス順序機械 $M=(S, Z, \delta, \lambda)$ の状態対グラフ $G_M$ をつぎのように定義する．節点は順序を無視した状態対に対応する節点と，一つの特別な節点 $\phi$ からなる．状態対 $(S_i, S_j)$ と $(S_k, S_l)$ に対して，つぎの2条件を満足するとき，状態対 $(S_i, S_j)$ に対応する節点から $(S_k, S_l)$ に対応する節点へ有向枝を引く．ただし，$S_i\neq S_j$, $S_k\neq S_l$ である．

（1） $\delta(S_i)=S_k$, $\delta(S_j)=S_l$ または $\delta(S_i)=S_l$, $\delta(S_j)=S_k$

（2） $\lambda(S_i)=\lambda(S_j)$

状態対 $(S_i, S_j)$ がつぎの2条件を満足するときは，$(S_i, S_j)$ に対応する節点から節点 $\phi$ に有向枝を引く．

（1） $\delta(S_i)=\delta(S_j)$,（2） $\lambda(S_i)=\lambda(S_j)$．このとき状態 $S_i$ と $S_j$ は "併合する" という．

オートノマス順序機械 $M$ の状態対グラフの節点は，つぎの四つの形に分けられる．

（I） 有向閉路上の節点およびそれに到達可能*な節点

（II） 節点 $\phi$ に到達可能な節点

（III） 既存の出力で区別される状態対 ($\lambda(S_i)\neq\lambda(S_j)$ なる $(S_i, S_j)$) に対応する節点およびそれに到達可能な節点

（IV） 節点 $\phi$

状態対グラフは，文献 (3) における testing graph と testing table を合わせたもので，文献 (3) で述べられている DS をもつための必要十分条件を，オートノマス順序機械に制限すると，明らかにつぎの補題1が成立する．

［補題1］(3) オートノマス順序機械 $M$ が DS をもつための必要十分条件は，$M$ の状態対グラフ $G_M$ において，併合する状態対がなく，有向閉路が存在しないことである．

与えられたオートノマス順序機械 $M$ が DS をもたないとき，DS をもつオートノマス順序機械に拡大す

* 節点 $v$ が $u$ に到達可能とは，$v$ から $u$ に至る道があるときとき．

るには，補題１より，状態対グラフの併合する状態対と有向閉路を除くように，出力関数を付加しなければならない．そのために付加出力関数で区別すべき状態の集合をブロックとする分解の定義と，付加出力関数を求める際に必要となる準 FSR 実現可能の定義をつぎに示す．

〔定義７〕 状態集合 $S$ の部分集合を要素とする集合で，その部分集合の和集合が $S$ となる集合を $S$ の分解と呼ぶ，その要素をブロックという．互いに素な*ブロックからなる分解を分割という．

〔定義８〕 分解 $\pi$ を規定する関係 $R_\pi$ をつぎのように定義する．すなわち，$S_iR_\pi S_j \Leftrightarrow S_i$ と $S_j$ がともに $\pi$ のあるブロック $B_k$ に含まれる．

〔定義９〕 分解 $\pi$ を規定する関係を $R_\pi$ とするとき，オートノマス順序機械 $M$ の状態遷移関数が，関係 $R_\pi$ で結ばれている状態間で異なる状態割り当てを行なうことにより図１の $p$ 値 $k$ 段フィードバックシフトレジスタで実現できるならば，オートノマス順序機械 $M$ は，“分解 $\pi$ に関して $(p, k)$ 準 FSR 実現可能である” という．

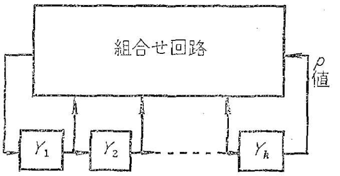

図１ オートノマスシフトレジスタ
Fig. 1—Autonomous shift register.

分割 1**に関して $(p, k)$ 準 FSR 実現可能であることを，単に $(p, k)$ FSR 実現可能という．したがって $\pi$ $(p, k)$ FSR 実現可能ならば，任意の分解に関して $(p, k)$ 準 FSR 実現可能である．

〔定義10〕 オートノマス順序機械 $M$ の状態対グラフ $G_M$ において，節点 $\phi$ に入射する状態対（併合する状態対）をおのおの一つのブロックに，各有向閉路から一つの状態対を選びおのおの一つのブロックに，残りの状態については，各状態一つを一つのブロックにするような分解を $\pi(M)$ とする．

$G_M$ において，(I)型，(II)型の節点に対応する各状態対をおのおの一つのブロックにし，残りの状態については，各状態一つずつ一つのブロックにする分解を $\pi[M]$ とする．

$G_M$ において，節点 $\phi$ に入射する状態対をおのおの一つのブロックに，各有向閉路から一つの状態対を選び，おのおの一つのブロックに，(III)型の節点系列の長さが $l$ を越えるときその系列の終点*から長さ $l$ 手前の節点に対応する状態対をおのおの一つのブロックに，残りの状態については各状態一つを一つのブロックにするような分解を $\pi(M, l)$ とする．

（例）表１の順序機械 $M_1$ の $a$ 列部分機械 $M_a$，$b$ 列部分機械 $M_b$ を例にとる．状態対グラフは図２に示す．ただし孤立した状態対は除いてある．

$\pi(M_a)$ は一意的には定まらないが，その一つは $\pi(M_a)=\{AE, BC, D\}$ がある．$\pi[M_a]=\{AE, AB, AC, BC, CE, BE, D\}$，$\pi(M_b, 1)=\{BD, BE, DE, AB, AD, AE, C\}$ となる．

補題１の（DS をもつための）必要十分条件を満たすようにする（併合する状態対を区別し，有向閉路を除く）には，$\pi(M)$ の定義より，少なくとも一つの $\pi(M)$ に関して，$\pi(M)$ の同じブロック内の状態を付加出力で区別することが必要でかつ十分である．

分解 $\pi[M]$ に関しては，すべての $\pi(M)$ に対して $\pi[M]\geq\pi(M)$**であり，しかもつぎの補題が成立する．

〔補題２〕 オートノマス順序機械$M$が，分解 $\pi(M)$ に関して $(p, k)$ 準 FSR 実現可能となる状態割当ては，分解 $\pi[M]$ に関しても $(p, k)$ 準 FSR 実現可能となる状態割当てである．逆も成立する．

（証明） $M$ が分解 $\pi(M)$ に関して $(p, k)$ 準 FSR

表１ 順序機械 $M_1$

| | $a$ | $b$ |
|---|---|---|
| $A$ | $B$ 1 | $E$ 1 |
| $B$ | $C$ 1 | $C$ 1 |
| $C$ | $A$ 1 | $D$ 0 |
| $D$ | $B$ 0 | $C$ 1 |
| $E$ | $B$ 1 | $C$ 1 |

(a) Ga (b) Gb

図２ 状態対グラフ
Fig. 2—State pair graph.

* ブロック $B_i$，$B_j$ $(i\neq j)$ に対して $B_i\cap B_j=\phi$ のとき互いに素．

** 状態集合 $S$ のすべての状態を含む一つのブロックからなる分割を **1**，各ブロックが１状態からなる分割を **0** で表わす．

* 終点とは，出る枝がない節点．

** * $aR_\pi b \Rightarrow aR_\tau b$ を満たすとき，$\pi\leq\tau$．

実現可能とする．この状態割当てが，$\pi[M]$ の同じブロックに属する状態間で異なる値をとることを示せば十分である．

$\pi[M]$ のブロックに属する状態対 $\alpha\beta$ は，定義 10 より状態対グラフの（I）型か（II）型の節点に対応する．しかも，$\delta^t(\alpha)=\bar{\alpha}$, $\delta^t(\beta)=\bar{\beta}$ となる状態対 $\bar{\alpha}\bar{\beta}$ が $\pi(M)$ に属する．ここで $\delta^t(\alpha)$ は状態 $\alpha$ の $t$ 時刻後の状態を示す．$\alpha$ と $\beta$ の状態割当てが等しいと仮定するならば，$\bar{\alpha}$ と $\bar{\beta}$ の状態割当ても等しくなり，$\pi(M)$ に関して $(p, k)$ 準 FSR 実現可能に反する．したがって $\alpha$ と $\beta$ の状態割当ては異なる．逆は明らかに成立する．（証明終）

以上の準備の後に，DS をもつ順序機械に拡大できるための必要十分条件に関する定理を挙げる．

［定理1］ オートノマス順序機械 $M$ に $p$ 値出力関数を付加することにより DS をもつオートノマス順序機械に拡大できるための必要十分条件は，順序機械 $M$ が分解 $\pi(M)$ に関して $(p, k)$ 準 FSR 実現可能となる正整数 $k$ が存在することである．

（証明）（十分条件）オートノマス順序機械 $M$ が分解 $\pi(M)$ に関して $(p, k)$ 準 FSR 実現可能とする．この状態割当ては，補題2により分解 $\pi[M]$ に関しても $(p, k)$ 準 FSR 実現可能となる．状態割当ての変数を $(Y_1, Y_2, \cdots, Y_k)$ とし時刻 $t$ の $Y_i$ の値を $Y_i(t)$ とすれば，$Y_i(t)=Y_{i-1}(t-1)$ $(i=2, 3, \cdots, k)$ が成立する．

順序機械 $M$ をつぎのように拡大する．すなわち，状態 $S_i$ の状態割当てを $(Y_{1i}, Y_{2i}, \cdots, Y_{ki})$ とし，$p$ 値出力関数 $\lambda_0: S\to Z_0(|Z_0|=p)$ を $\lambda_0(S_i)=Y_{ki}$ で定義する．この $p$ 値出力関数 $\lambda_0$ を $M$ に付加することにより拡大されたオートノマス順序機械を $M'$ とおく．$M'$ が DS をもつことをつぎに示す．

オートノマス順序機械 $M'$ の出力関数 $\lambda_0$ から得られる長さ $k$ の出力系列は，$Y_k(t_0)Y_k(t_0+1)\cdots Y_k(t_0+k-1)$ となる．しかも $Y_i(t)=Y_{i-1}(t-1)$ が成立するからこの出力系列は，$Y_k(t_0)Y_{k-1}(t_0)\cdots Y_1(t_0)$ となり時刻 $t_0$ の初期状態の状態割当てを知ることができる．この状態割当てで，分解 $\pi[M]$ に関して $(p, k)$ 準 FSR 実現可能であるから，関係 $R_{\pi[M]}$ で結ばれている状態は，異なる状態割当てになっている．したがって，$\lambda_0$ から得られる長さ $k$ の出力系列により，関係 $R_{\pi[M]}$ で結ばれている状態を区別することができる．分解 $\pi[M]$ の定義より，関係 $R_{\pi[M]}$ で結ばれていない状態は，既存の出力関数 $\lambda$ から得られる出力系列により区別することができる．ゆえに，$\lambda$ と $\lambda_0$ から得られる出力系列により，初期状態を決定することができ，オートノマス順序機械 $M'$ は DS をもつ．

（必要条件） オートノマス順序機械 $M=(S, Z, \delta, \lambda)$ に $p$ 値出力関数を付加することにより長さ $k$ の DS をもつオートノマス順序機械 $M'$ に拡大できたとする．$M'=(S, Z', \delta, \lambda')$, $Z'=Z\times Z_0$, $\lambda': S\to Z'$ は $\lambda'(S_i)=(\lambda(S_i), \lambda_0(S_i))$ で定義される．ここで $\lambda_0: S\to Z_0$ は $p$ 値付加出力関数である．

各状態に変数 $(Y_1, Y_2, \cdots, Y_k)$ をつぎのように割り当てる．$M'$ の各状態 $S_i$ を初期状態とし，出力関数 $\lambda_0$ から得られる長さ $k$ の出力系列を $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_k(\sigma_j\in Z_0)$ とするとき，状態 $S_i$ に $(\sigma_k, \sigma_{k-1}, \cdots, \sigma_1)$ を割り当てる．$S_i$ の次時刻の状態 $S_i'=\delta(S_i)$ には，$(\sigma_{k+1}, \sigma_k, \cdots, \sigma_2)$ が割り当てられる．したがって，この状態割当ては，$Y_i(t)=Y_{i-1}(t-1)$ $(i=2, 3, \cdots, k)$ を満足する．$M'$ が $\pi(M)$ に関して $(p, k)$ 準 FSR 実現可能であることを示すには，$R_{\pi(M)}$ で結ばれている状態間で，状態割当てが異なることを示せばよい．

$M'$ は長さ $k$ の DS をもつから，出力関数 $\lambda'$（$\lambda$ と $\lambda_0$）から得られる長さ $k$ の出力系列により初期状態を区別できる．$R_{\pi(M)}$ で結ばれている状態は出力関数 $\lambda$ で区別できない状態であるゆえ，$\lambda_0$ から得られる長さ $k$ の出力系列で区別できることになる．したがって，$R_{\pi(M)}$ で結ばれている状態間で状態割当ては異なることになり $M'$ は $\pi(M)$ に関して $(p, k)$ 準 FSR 実現可能となる．$M'$ と $M$ の状態遷移関数は同じであるから，順序機械 $M$ も $\pi(M)$ に関して $(p, k)$ 準 FSR 実現可能となる．（証明終）

［定理2］ オートノマス順序機械 $M$ に $p$ 値出力関数を付加することにより，長さ $k$ の DS をもつオートノマス順序機械に拡大できるための必要十分条件は，オートノマス順序機械 $M$ が分解 $\pi(M, k)$ に関して $(p, k)$ 準 FSR 実現可能であることである．

（証明） 定理1の証明とほぼ同様に証明できる．

（必要条件） $M=(S, Z, \delta, \lambda)$ に $p$ 値出力関数 $\lambda_0: S\to Z_0$ を付加することにより長さ $k$ の DS をもつオートノマス順序機械 $M'$ に拡大できたとする．

$M'=(S, Z', \delta, \lambda')$, $Z'=Z\times Z_0$, $\lambda': S\to Z'$ は $\lambda'(S_i)=(\lambda(S_i), \lambda_0(S_i))$ で定義する．

各状態に変数 $(Y_1, Y_2, \cdots, Y_k)$ をつぎのように割り当てる．$M'$ の各状態 $S_i$ を初期状態とし，$\lambda_0$ から得られる長さ $k$ の出力系列を $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_k$ とするとき，$S_i$ の状態割当てを $(\sigma_k, \sigma_{k-1}, \cdots, \sigma_1)$ とする．この

状態割当てが $\pi(M)$ に関して $(p, k)$ 準 FSR 実現可能となることは，定理1の証明で示した．この状態割当てが，$\pi(M, k)$ に関して $(p, k)$ 準 FSR 実現可能となることを示すには，定義10により，(Ⅲ) 型の節点系列の終点から長さ $k$ 手前の節点に対応する状態対の状態割当てが，異なることを示せば十分である．この状態対の状態割当てが等しいとすれば，$\lambda_0$ から得られる長さ $k$ の出力系列では区別できない．ところが，状態対グラフにおいて，この状態対は (Ⅲ) 型の節点に対応し，しかもこの節点から終点までの節点系列の長さは $k+1$ である．したがって，この状態対は $\lambda$ から得られる長さ $k$ の出力系列では区別できないことになり，$M'$ が長さ $k$ の DS をもつ仮定に反する．したがってこの状態対の状態割当ては異なる．

（十分条件） $M$ が $\pi(M, k)$ に関して $(p, k)$ 準 FSR 実現可能とする．定理1の証明と同様に，$M$ に $p$ 値出力関数 $\lambda_0 : S \to Z_0$ を付加する．拡大された順序機械 $M'$ が DS をもつことは定理1より明らかである．長さ $k$ の DS をもつことをつぎに示そう．

$M$ の状態対グラフ $G_M$ において，(Ⅰ) 型，(Ⅱ) 型の状態対は，$\lambda_0$ から得られる長さ $k$ の出力系列により区別される．(Ⅲ) 型の終点から長さ $l(l \geqq k)$ 手前の節点に対応する状態対も分解 $\pi(M, k)$ の定義から $\lambda_0$ の長さ $k$ の出力系列により区別できる．(Ⅲ) 型の終点から長さ $l(0 \leqq l < k)$ 手前の節点に対応する状態対は，$\lambda$ から得られる長さ $k$ の出力系列により区別される．したがって，拡大された順序機械 $M'$ は長さ $k$ の DS をもつ．（証明終）

定理2は，長さ $n$ 以下（$n$ は状態数）の DS をもつ順序機械に拡大する方法の基礎となる定理である．

## 4. $p$ 値 $k$ 段 FSR

オートノマス順序機械 $M$ 分解 $\pi$ に関して $(p, k)$ 準 FSR 実現可能となる $p$ の値および FSR の長さ $k$ に関する定理を挙げよう．

まず，FSR の長さに関してつぎの定理が成立する．

［定理3］ $n$ 状態オートノマス順序機械 $M$ が分解 $\pi$ に関して $(p, k)$ 準 FSR 実現可能となる正整数 $k$ が存在するならば，$M$ が $\pi$ に関して $(p, l)$ 準 FSR 実現可能となる $l \leqq n$ が存在する．

定理3の証明に必要な補題をつぎに示す．

［補題3］ (Jump and Marathe[8]) 二つの無限列 $\bar{x}=x_0x_1x_2\cdots$ と $\bar{y}=y_0y_1y_2\cdots$ がつぎの3条件を満足するならば，この二つの無限列は相等しい．

(1) $x_i=x_{i+m}$ $i \geqq 0$, (2) $y_i=y_{i+n}$ $i \geqq 0$, (3) $x_i=y_i$ $0 \leqq i < m+n-d$. ここで，$d$ は $m$ と $n$ の正なる公約数．

（定理3の証明） オートノマス順序機械 $M$ の状態遷移図において，長さ $k_1, k_2, \cdots, k_r$ の有向閉路が存在し，$k_1 < k_2 < \cdots < k_r$ とする．有向閉路外の各状態から有向閉路内の状態に至る状態系列（有向閉路内の状態を除く）の中で，最も長い系列長を $e$ とする．すなわち，どの状態からも，$e$ 時刻後には有向閉路内の状態に遷移することができる．$k_i$ と $k_j$ の最大公約数を $d_{ij}$ とおき，$l=e+\max_{i,j \in \{1,2,\cdots,r\}}(k_i+k_j-d_{ij})$ とおく．明らかに $l \leqq n$ である．

$k \leqq l$ のときは明らかに定理は成立する．したがって $k > l$ のときについて定理を証明する．$M$ が分解 $\pi$ に関して $(p, k)$ 準 FSR 実現可能とする．状態 $S_i$ の状態割当てを $(Y_{1i}, Y_{2i}, \cdots, Y_{ki})$ とするとき，$R(S_i)$ を $R(S_i)=Y_{ki}$ で定義し，各状態 $S_i$ に $R(S_i)$ を対応させる．この状態割当ては FSR 実現であるから $(Y_{1i}, Y_{2i}, \cdots, Y_{ki})=(R(\delta^{k-1}(S_i)), R(\delta^{k-2}(S_i)), \cdots, R(\delta(S_i)), R(S_i))$ を満足する．この $R(S_i)$ を用いて $l$ 変数 $(Y_1, Y_2, \cdots, Y_l)$ で状態割当てをつぎのように行なう．すなわち，状態 $S_i$ の状態割当てを $(R(\delta^{l-1}(S_i)), \cdots, R(\delta(S_i)), R(S_i))$ と定義する．この状態割当ては明らかに $Y_i(t)=Y_{i-1}(t-1)$ $(i=2, 3, \cdots, l)$ を満足する．分解 $\pi$ に関して $(p, l)$ 準 FSR 実現可能であることを示すには，関係 $R_\pi$ で結ばれている状態間でこの状態割当てが異なることを示せばよい．

関係 $R_\pi$ で結ばれている状態 $S_i$ と $S_j$ に対して，状態割当てが同じとする．すなわち，

$$R(\delta^t(S_i))=R(\delta^t(S_j)) \quad 0 \leqq t \leqq l-1 \qquad (1)$$

と仮定する．$\delta^e(S_i)$ と $\delta^e(S_j)$ は $e$ の定義より有向閉路に含まれる状態である．おのおの長さ $k_i, k_j$ の有向閉路内の状態とすると，

$$R(\delta^{e+t}(S_i))=R(\delta^{e+t+k_i}(S_i)),\ R(\delta^{e+t}(S_j)) =R(\delta^{e+t+k_j}(S_j)) \quad t \geqq 0 \qquad (2)$$

が成立する．しかも式 (1) より，

$$R(\delta^{e+t}(S_i))=R(\delta^{e+t}(S_j)) \quad 0 \leqq t < l-e =\max_{i,j}(k_i+k_j-d_{ij})$$

ゆえに，

$$R(\delta^{e+t}(S_i))=R(\delta^{e+t}(S_j)) \quad 0 \leqq t < k_i+k_j-d_{ij} \qquad (3)$$

式 (2)，式 (3) は補題3の条件を満たすから，

$$R(\delta^{e+t}(S_i))=R(\delta^{e+t}(S_j)) \quad t \geqq 0$$

これと式 (1) より

$$R(\delta^t(S_i))=R(\delta^{e+t}(S_j))\ 0\leqq t\leqq k-1$$

これは関係 $R_\pi$ で結ばれている状態 $S_i$ と $S_j$ の状態割当て $(Y_{1i}, Y_{2i},\cdots, Y_{ki})$, $(Y_{1j}, Y_{2j}, \cdots, Y_{kj})$ が等しくなり，分解 $\pi$ に関して $(p, k)$ 準 FSR 実現可能に反する．したがって，$R_\pi$ で結ばれている状態間で，先に定義した．$l$ 変数の状態割当ては異なる．

（証明終）

つぎに，オートノマス順序機械が $(p, k)$ FSR 実現可能となるための必要十分条件に関する既知の定理を挙げる．

［定理 4］ (Haring[9]) オートノマス順序機械 $M$ が $(p, k)$ FSR 実現可能となる正整数 $k$ が存在するための必要十分条件は，つぎの条件 (1), (2) を満足することである．

（1） $M$ の部分置換機械*が $(p, k)$ FSR 実現可能となる正整数 $k$ が存在する．

（2） 分割 $M(\mathbf{0})$** の各ブロックにはたかだか $p$ 個の状態しか含まれない．

［定理 5］ (Elspas[7]) オートノマス置換機械 $M$ が素数 $p$ に対して，$(p, k)$ FSR 実現可能となる $k$ が存在するための必要十分条件は，$M$ の状態遷移図における長さ $l$ の有向閉路の数を $\mu_l$ とするとき，各長さの有向閉路に対して $\mu_l\leqq I_p(l)$ を満足することである．ここで $I_p(l)$ は Galois 体 GF$(p)$ 上の $l$ 次既約多項式の数である．

オートノマス順序機械 $M$ が分解 $\pi$ に関して $(p, k)$ 準 FSR 実現可能となる $p$ の最小値 $p_0$ の範囲を調べてみよう．

まず $M$ の部分置換機械 $M_p$ が定理 5 の条件（長さ $l$ について $\mu_l\leqq I_p(l)$）を満足する $p$ の最小値を $p_1$, $M(\mathbf{0})$ の各ブロックの状態数の最大値を $p_2$ とし，$p_u=\max(p_1, p_2)$ とおく，定理 5 により $M_p$ はある正整数 $k$ に対して $(p_u, k)$ FSR 実現可能となる．したがって $p_u$ は定理 4 の条件 (1), (2) を満足するから，$M$ はある $k$ に対して $(p_u, k)$ FSR 実現可能である．したがって $M$ は任意の分解 $\pi$ に関して $(p_u, k)$ 準 FSR 実現可能である．ゆえに $p_0\leqq p_u$.

$M(\mathbf{0})\cdot\pi$ の各ブロックの状態数の最大値を $p_l$ とする．$\pi$ の同じブロックに属する状態間で異なる状態割当てを行なうには，状態変数が $p_l$ 値以上でなければならない．したがって，$\pi$ に関して $(p, k)$ 準 FSR 実現可能となる $p$ の最小値 $p_0$ は，$p_0\geqq p_l$.

以上より $p$ の最小値 $p_0$ に関してつぎの定理が成立する．

［定理 6］ オートノマス順序機械 $M$ が分解 $\pi$ に関して $(p, k)$ 準 FSR 実現可能となる正整数 $k$ が存在するような $p$ の最小値 $p_0$ は，$p_l\leqq p_0\leqq p_u$ である．

## 5. 拡大のアルゴリズム

本節では，順序機械 $M$ に $p$ 値出力関数を付加することにより，その順序機械を含み $I_j{}^l$-DS をもつ順序機械に拡大するアルゴリズム，長さ $n$（状態数）以下の $I_j{}^l$-DS をもつ順序機械に拡大するアルゴリズム，および状態の split を許して二値出力関数（1 本の出力端子）を付加することにより $I_j{}^l$-DS をもつ順序機械に拡大するアルゴリズムを述べる．

まず定理 1，定理 3 および定理 6 を基礎にして，出力記号数最小の出力関数を付加することにより $I_j{}^l$-DS をもつ順序機械に拡大するアルゴリズムをつぎに示す．

［アルゴリズム A］

［1］ 与えられた $n$ 状態順序機械 $M$ の $I_j$ 列部分機械 $M_{I_j}$ の状態対グラフ $G_{I_j}$ を作成する．

［2］ 状態対グラフ $G_{I_j}$ において分解 $\pi(M_{I_j})$ を求める．

［3］ $M_{I_j}$ の $p_l$ の値を求め，$p=p_l$ とおく．

［4］ $M_{I_j}$ が分解 $\pi(M_{I_j})$ に関して $(p, k)$ 準 FSR 実現可能となる $k$ が存在するか調べる．ある $k$ に対して $(p, k)$ 準 FSR 実現可能ならば［5］へ，存在しなければ $p=p+1$ とし［4］を繰り返す．

［5］ 状態 $S_i$ に対応する状態割当てを $(Y_{1i}, Y_{2i}, \cdots, Y_{ki})$ とするとき，$\lambda_0: S\to Z_0$ を $\lambda_0(S_i)=Y_{ki}$ で定義し，$\lambda_0$ を $M_{I_j}$ に（したがって $M$ に）付加する．

アルゴリズム A［4］において，FSR の段数 $k$ が $n$ でおさえられること，求める $p_0$ が $p_l$ と $p_u$ の間に存在すること，したがってアルゴリズム A が有限回の操作で終わることは，定理 3 と定理 6 により保障されている．

アルゴリズム A は，最小個の出力記号からなる出力関数を付加することにより $I_j{}^l$-DS をもつ順序機械に拡大するアルゴリズムを示している．この立場では最小の出力関数付加による拡大ではあるが，一般に複数個の出力端子を付加しなければならない．状態数増加

* 順序機械 $M$ の状態遷移図の有向閉路だけからなる部分機械を $M$ の部分置換機械という．

** 併合する状態を同じブロックに入れる分割．

を許してもよいならば，つぎの補題が成立することから一般に1本の付加出力端子で $I_j^l$-DS をもつ順序機械に拡大することが可能である．

［補題4］[6] 任意のオートノマス順序機械は，等価な状態を加えることにより，ある正整数 $k$ に対して，$(2, k)$ FSR 実現可能にすることができる．したがって任意の分解に関して $(p, k)$ 準 FSR 実現可能にすることができる．

定理1，定理3および補題4を基礎にして，1本の出力端子付加により $I_j^l$-DS をもつ順序機械に拡大するアルゴリズムをつぎに示す．

［アルゴリズムB］

［1］，［2］ はアルゴリズムAに同じ，

［3］ ある正整数 $k(\leqq n)$ に対して $M_{I_j}$ が $\pi(M_{I_j})$ に関して $(2, k)$ 準 FSR 実現可能かどうか調べる．可能ならば［5］へ移る．

［4］ 最小の状態の split により $\pi(M_{I_j})$ に関して $(2, k)$ 準 FSR 実現可能にする．

［5］ $\pi(M_{I_j})$ に関して $(2, k)$ 準 FSR 実現可能とする状態割当てを求め，状態 $S_i$ の状態割当てを $(Y_{1i}, Y_{2i}, \cdots, Y_{ki})(Y_{ji}\in\{0, 1\})$ とするとき，$\lambda_0 : S\to\{0, 1\}$ を，$\lambda_0(S_i)=Y_{ki}$ で定義し，二値出力関数 $\lambda_0$ を $M_{I_j}$（したがって$M$）に付加する．

Martin[4] の方法では，与えられた順序機械 $M$ の出力関数を無視しているために，すべての状態を付加出力だけで区別しなければならない．すなわちアルゴリズムBの［1］,［2］を行なわずに，$M$ の $I_j$ 列部分機械を $(2, k)$ FSR 実現可能な順序機械に変更している．したがって，$I_j^l$-DS をもたせるのに必要以上の状態の split が行なわれることになる．$I_j^l$-DS をもたせるには，分解 $\pi(M_{I_j})$ に関して $(2, k)$ 準 FSR 実現可能にすることが必要でかつ十分である．

つぎに，$n$ 状態順序機械に出力記号数最小の出力関数を付加することにより，長さ $n$ 以下の $I_j^l$-DS をもつ順序機械に拡大するアルゴリズムを示す．

［アルゴリズムC］

アルゴリズムAにおいて，$\pi(M_{I_j})$ を $\pi(M_{I_j}, n)$ で置き換えたアルゴリズムがアルゴリズムC．

アルゴリズムCにより得られる順序機械が長さ $n$ 以下の $I_j^l$-DS をもつ順序機械になる保障は定理2と定理3による．すなわち，$M_{I_j}$ が $\pi(M_{I_j}, n)$ に関して $(p_0, k)$ 準 FSR 実現可能ならば，定理3により，$(p_0, l)$ 準 FSR 実現可能 $(l\leqq n)$ となる．したがって定理2により，長さ $n$ 以下の DS をもつ順序機械 $M_{I_j}'$ に拡大できる．

## 6. 例　　題

表1の既約で強連結な順序機械 $M_1$ の $a$ 列部分機械 $M_a$ にアルゴリズムA を適用する．［1］状態対グラフを図2(a) に示す．［2］$\pi(M_a)$ を求めると，その一つとして $\pi(M_a)=\{AE, BC, D\}$ が得られる．［3］,［4］$M_a$ は $\pi(M_a)$ に関して $(2, 3)$ 準 FSR 実現可能となりその状態割当ては表2に示す．

［5］ 付加出力関数 $\lambda_0$ は，$\lambda_0(A)=\lambda_0(D)=0$, $\lambda_0(B)=\lambda_0(C)=\lambda_0(E)=1$ となり，拡大された順序機械 $M_1'$ は表3に示す．$M_1'$ は $aaa$ を DS にもつ．

つぎに $b$ 列部分機械 $M_b$ にアルゴリズムBを施すと，［1］状態対グラフを図2(b) に示す．［2］$\pi(M_b)$ を求めると，$\pi(M_b)=\{A, C, BD, BE, DE\}$．［3］$M_b$ は $\pi(M_b)$ に関して $(2, k)$ 準 FSR 実現不可能である．［4］へ移り，図3における併合する状態 $BDE$ を除くために，まず状態 $C$ を図3のように split する．$M_b'$ は分解 $\pi(M_b')=\{A, CC', BD, BE, DE\}$ に関して (2,2) 準 FSR 実現可能になる．

**表 2**　状態割当て

| | $Y_1$ | $Y_2$ | $Y_3$ |
|---|---|---|---|
| $A$ | 1 | 1 | 0 |
| $B$ | 0 | 1 | 1 |
| $C$ | 1 | 0 | 1 |
| $D$ | 1 | 1 | 0 |
| $E$ | 1 | 1 | 1 |

**表 3**　順序機械 $M_1$

| | $a$ | $b$ |
|---|---|---|
| $A$ | $B$10 | $E$1- |
| $B$ | $C$11 | $C$1- |
| $C$ | $A$11 | $D$0- |
| $D$ | $B$00 | $C$1- |
| $E$ | $B$11 | $C$1- |

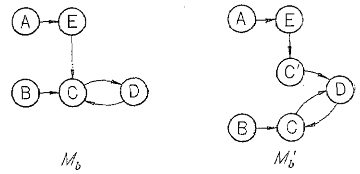


図 3　部分機械 $M_b$ と状態の split
Fig. 3—Submachine $M_b$ and state splitting.

## 7. む す び

本論文では出力関数を付加することにより $I_j^l$-DS

をもつ順序機械に拡大する問題について考察した．順序機械 $M$ を $I_j{}^l$-DS をもつ順序機械に拡大する問題は順序機械 $M$ の $I_j$ 列部分機械を，DS をもつオートノマス順序機械に拡大する問題と等価になる．したがって，オートノマス順序機械に対象を限って，オートノマス順序機械 $M$ に $p$ 値出力関数を付加することにより DS をもつ順序機械に拡大できるための必要十分条件を示し，その拡大のアルゴリズムを述べた．さらに，長さ $k$ の DS をもつ順序機械に拡大できるための必要十分条件が，"分解 $\pi(M, k)$ に関して $(p, k)$ 準 FSR 実現可能" であることを示し，状態数を越えない長さの DS をもつ順序機械に拡大するアルゴリズムを述べた．

謝辞　最後に，日ごろ，ご指導をいただく本学の尾崎弘教授，ならびにご討論くださった本学尾崎研究室の方々に謝意を表する．

## 文　献


(1) F.C. Hennie : "Fault detecting experiments for sequential circuits", in Proc. 5th Ann. Sympo. Switching Theory and Logical Design. (Nov. 1964).

(2) E.P. Hsieh : "Checking experiments for requential machines", IEEE Trans., **C-19**, p. 551(June 1970).

(3) Z. Kohavi and P. Lavallee : "Design of sequential machines with fault-detection capabilities", IEEE Trans., **EC-16**, p. 473 (Aug. 1967).

(4) R. L. Martin : "The design of diagnosable sequential machines", in Proc. Hawaii Internat. Conf. Syst. Sci. (1968).

(5) 中村，嵩："診断を容易にするような状態割り当てについて"，信学会オートマトン・インホメーション理論研資，**AIT 69**-43・39 (1969-10).

(6) 村上，樹下，尾崎："故障検査を考慮した順序機械の構成法"，信学論(C)，**51-C**, 10 (昭43-10).

(7) B. Elspas : "The theory of autonomous linear sequential networks", IRE Trans., **CT-16**, p. 45 (March 1959).

(8) J. R. Jump and S. Marathe : "On the length of feedback shift registers", Inf. and Cont., 19, p. 345 (1971).

(9) D. R. Haring : "Sequential-circuit synthesis : state assignment aspects", MIT Press, Cambridge, Mass. (1966).

(10) R.L. Martin : "Studies in feedback-shift-register synthesis of sequential machines", MIT Press., Cambridge, Mass. (1969).

(11) 尾崎，樹下："ディジタル代数学"，共立出版．

(12) 藤原，樹下："出力端子付加による診断容易な順序機械について"，信学会電子計算機研資，**EC 72-3** (1972-05).


(昭和 47 年 6 月 12 日受付)